PART3 半直線のなす角

要点整理と公式

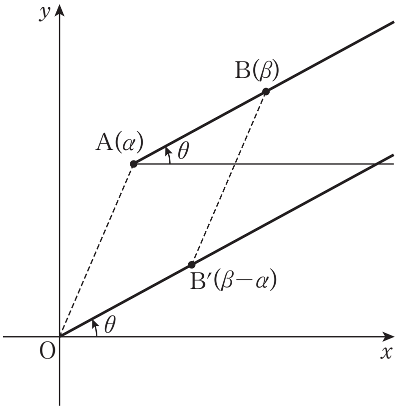
要点① 半直線が実軸となす角

複素数平面上の異なる2点 A(α)，B(β) について，半直線 AB が実軸の正の方向となす角を θ とする。この角 θ は，向きを含めて考える。

点 A を原点に移す平行移動によって，点 B は B′(　　) に移り，半直線 OB′ が実軸の正の方向となす角は θ であることから

$\theta=\arg($　　$)$

である。



要点② 半直線のなす角

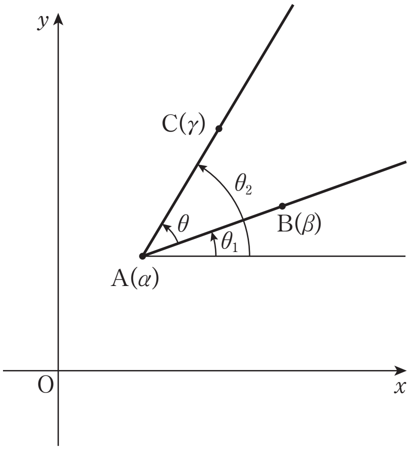
複素数平面上の異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角を θ，AB，AC が実軸の正の方向となす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする。角 θ，θ_1，θ_2 は，向きを含めて考える。

$\theta=\theta_2-\theta_1$

$=\arg($　　$)-\arg($　　$)$

$=\arg\dfrac{\qquad}{\qquad}$

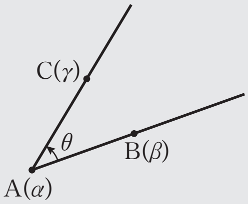
である。



半直線のなす角

異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



(ex) $\mathrm{A}(1+i)$，$\mathrm{B}(4+2i)$，$\mathrm{C}(3+5i)$ のとき，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ

$\alpha=1+i$，$\beta=4+2i$，$\gamma=3+5i$ とすると

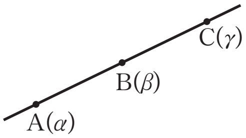
$$\underline{\qquad\qquad}=\frac{(3+5i)-(1+i)}{(4+2i)-(1+i)}=\frac{2+4i}{3+i}=\frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$=\frac{10+10i}{10}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

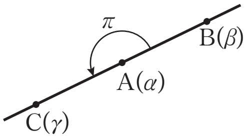
よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

要点③ 複素数平面上の 3 点の位置関係

複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ において，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする。

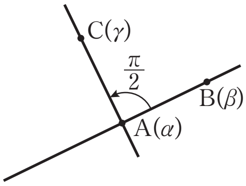


3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，$\theta=0$ または $\theta=\pi$ のときである。このとき



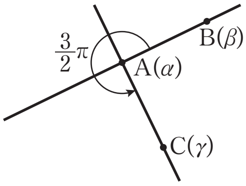
$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0 \text{ または } \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pi$$

より，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。



2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ または $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{2} \text{ または } \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{2}\pi$$



より，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数である。

よって，次のことが成り立つ。

> 異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ について，
>
> 3 点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数
>
> 2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

3 (1) 複素数平面上の 3 点 A$(2+2i)$，B$(1+3i)$，C$(4+\sqrt{3}+i)$ について，∠BAC の大きさを求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 A$(3+i)$，B$(6-2i)$，C$(x+5i)$ について，次の条件を満たす実数 x の値をそれぞれ求めよ。

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にある。

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わる。

Point Pickup

半直線のなす角，3 点の位置関係

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について

- $\angle\text{BAC}=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$
- 3 点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数（$\angle\text{BAC}=0$ または π）
- 2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数（$\angle\text{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$）

第 8 講 PART3 確認問題

1 複素数平面上に 3 点 A$(2+i)$，B$(5+2i)$，C$(-6+5i)$ があるとき，∠BAC の大きさを求める。

$\alpha=2+i$，$\beta=5+2i$，$\gamma=-6+5i$ とすると，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\,i$$

であるから，∠BAC＝ エ である。

エ は下の①～④のうちから選べ。

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{2}{3}\pi$　④ $\frac{3}{4}\pi$

2 複素数平面上の 3 点 A$(2i)$，B$(1+i)$，C$(x-3i)$ が一直線上にあるとき，$x=$ オ である。

3 複素数平面上の 3 点 A$(1-i)$，B$(3+2i)$，C$(x-3i)$ において，2 直線 AB，AC が垂直に交わるとき，$x=$ カ である。

PART3 半直線のなす角

3 (1) 複素数平面上の 3 点 A$(2+2i)$，B$(1+3i)$，C$(4+\sqrt{3}+i)$ について，$\angle$BAC の大きさを求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 A$(3+i)$，B$(6-2i)$，C$(x+5i)$ について，次の条件を満たす実数 x の値をそれぞれ求めよ。

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にある。

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わる。

[解答]

(1) $\alpha=2+2i$，$\beta=1+3i$，$\gamma=4+\sqrt{3}+i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(4+\sqrt{3}+i)-(2+2i)}{(1+3i)-(2+2i)}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})-i}{-1+i}=\frac{\{(2+\sqrt{3})-i\}(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$=(1+\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=(1+\sqrt{3})\left\{\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

よって，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{5}{6}\pi$ より $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{5}{6}\pi$

(2) $\alpha=3+i$，$\beta=6-2i$，$\gamma=x+5i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x+5i)-(3+i)}{(6-2i)-(3+i)}=\frac{x-3+4i}{3-3i}=\frac{(x-3+4i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}$$

$$=\frac{(3x-21)+(3x+3)i}{18}=\frac{(x-7)+(x+1)i}{6}$$

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にあるのは $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときであるから

$x+1=0$ よって $x=-1$

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから

$x-7=0$ かつ $x+1\neq 0$　　よって $x=7$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：2，エ：④

[解説]

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(-6+5i)-(2+i)}{(5+2i)-(2+i)}$$

$$=\frac{-8+4i}{3+i}$$

$$=\frac{(-8+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$ [A]

$$=\frac{-24+8i+12i-4i^2}{9-i^2}$$

$$=\frac{-20+20i}{10}$$

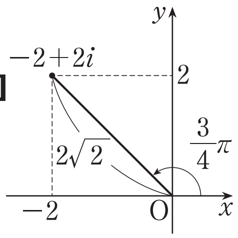
$$=\mathbf{-2+2}\boldsymbol{i}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって，

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{4}\pi$$ [B]

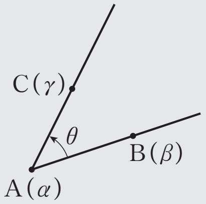
より，$\angle \mathbf{BAC}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$



[A]　分母・分子に $3-i$ をかけ，分母を実数にする。

[B]　半直線のなす角
異なる 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は，

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



2　[正解] オ：5

[解説]

$\alpha=2i$，$\beta=1+i$，$\gamma=x-3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x-3i)-2i}{(1+i)-2i}$$

$$=\frac{x-5i}{1-i}$$

$$=\frac{(x-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{x+xi-5i-5i^2}{1-i^2}$$

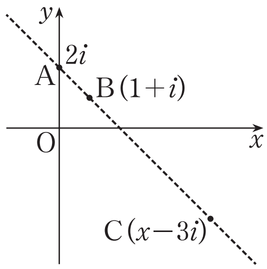
$$=\frac{(x+5)+(x-5)i}{2}$$

[C]　分母・分子に $1+i$ をかけ，分母を実数にする。

3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときであるから，[D]

$x-5=0$

$\boldsymbol{x=5}$



[D]　異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，
3 点 A，B，C が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

3

[正解] カ：4

[解説]

$\alpha=1-i$，$\beta=3+2i$，$\gamma=x-3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x-3i)-(1-i)}{(3+2i)-(1-i)}$$

$$=\frac{(x-1)-2i}{2+3i}$$

$$=\frac{\{(x-1)-2i\}(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$ [E]

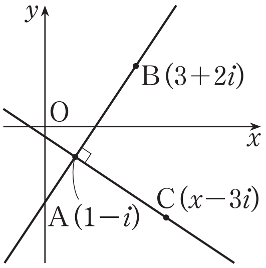
$$=\frac{2(x-1)-3(x-1)i-4i+6i^2}{4-9i^2}$$

$$=\frac{(2x-8)+(-3x-1)i}{13}$$

2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから，[F]

$$2x-8=0 \quad \text{かつ} \quad -3x-1\neq 0$$

よって，$\boldsymbol{x=4}$



[E]　分母・分子に $2-3i$ をかけ，分母を実数にする。

[F]　異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，
2 直線 AB，AC が垂直に交わる
$\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数